Α΄ ΔΥΣΚΟΛΙΑΣ

1. Να βρείτε το Μ.Κ.Δ. των ακεραίων α,β και να τον εκφράσετε ως γραμμικό συνδυασμό των α και β σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις

(i) $\alpha=135$ και $\beta=56$, (ii) $\alpha=180$ και $\beta=84$

(iii) $\alpha=-180$ και $\beta=84$, (iv) $\alpha=-180$ και $\beta=-84$.

2. Να αποδείξετε ότι

(i) $(2\kappa+2, 2\kappa)=2$, $\kappa\in\mathbf{Z}$ (ii) $(2\nu-1, 2\nu+1)=1$, $\nu\in\mathbf{N}^*$

(iii) $[2\nu-1, 2\nu+1]=(2\nu-1)(2\nu+1)$, $\nu\in\mathbf{N}^*$ (iv) $(\nu+2, 2)|\nu$, $\nu\in\mathbf{N}^*$

(v) $[\nu, \nu+1]=\nu(\nu+1)$, $\nu\in\mathbf{N}^*$.

3. Να αποδείξετε ότι $(\alpha,\beta)\leq(\alpha+\beta,\alpha-\beta)$.

4. Έστω $\alpha,\beta,x,y\in\mathbf{Z}$, με $\alpha x-\beta y=1$. Να αποδείξετε ότι $(\alpha+\beta,x+y)=1$.

5. Να αποδείξετε ότι

(i) $(2\alpha-3\beta,4\alpha-5\beta)|\beta$ (ii) $(2\alpha+3,\ 4\alpha+5)=1$ (iii) $(5\alpha+2,\ 7\alpha+3)=1$.

6. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\kappa\in\mathbf{Z}$ ισχύει:

(i) $\left(2\kappa+1, \dfrac{\kappa(\kappa+1)}{2}\right)=1$, (ii) $(4\kappa^2+3\kappa-5,\ 2\kappa^2+\kappa-2)=1$.

7. Να αποδείξετε ότι $(\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta)=(\alpha,\beta)$.

8. Να βρείτε το θετικό ακέραιο α για τον οποίο ισχύει:

(i) $(\alpha,\alpha+\nu)=1$, για κάθε $\nu\in\mathbf{N}^*$

(ii) $(\nu,\alpha+\nu)=1$, για κάθε $\nu\in\mathbf{N}^*$.

9. Αν $(\alpha,\beta)=1$ και $\gamma|(\alpha+\beta)$, να αποδείξετε ότι $(\alpha,\gamma)=(\beta,\gamma)=1$.

10. Έστω α,β,μ,ν φυσικοί αριθμοί (εκτός του 0) με $(\alpha,\beta)=1$. ΝΔΟ $(\alpha^{\mu},\beta^{\nu})=1$.

11. Να γράψετε στην κανονική τους μορφή τους αριθμούς 490, 1125, 2728 και να βρείτε τον ΜΚΔ και το ΕΚΠ αυτών.

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ (ΜΚΔ) ΚΑΙ (ΕΚΠ)

Α' ΔΥΣΚΟΛΙΑΣ:

1) Να βρείτε τον ΜΚΔ των ακεραίων α, β και να τον εκφράσετε ως γραμμικό συνδυασμό των α, β ακεραίων σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i) $\alpha = 135$ και $\beta = 56$ iii) $\alpha = -180$ και $\beta = 84$

ii) $\alpha = 180$ και $\beta = 84$ iv) $\alpha = -180$ και $\beta = -84$

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε, διαδοχικά:

$135 = 2\cdot 56 + 23$ οπότε $23 = 135 - 2\cdot 56$

$56 = 2\cdot 23 + 10$ οπότε $10 = 56 - 2\cdot 23$

$23 = 2\cdot 10 + 3$ οπότε $3 = 23 - 2\cdot 10$

$10 = 3\cdot 3 + \boxed{1}$ οπότε $1 = 10 - 3\cdot 3$

$3 = 3\cdot 1 + 0$ Άρα, $(135, 56) = 1$

Επομένως, έχουμε:

$$1 = 10 - 3\cdot 3 = 10 - 3\cdot(23 - 2\cdot 10) = 7\cdot 10 - 3\cdot 23 =$$
$$= 7\cdot(56 - 2\cdot 23) - 3\cdot 23 = 7\cdot 56 - 17\cdot 23 =$$
$$= 7\cdot 56 - 17(135 - 2\cdot 56) = -17\cdot 135 + 41\cdot 56 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 = (-17)\cdot 135 + 41\cdot 56.$$

ii) Έχουμε, διαδοχικά:

$180 = 2\cdot 84 + \boxed{12}$ οπότε $12 = 180 - 2\cdot 84$

$84 = 7\cdot 12 + 0$ Άρα, $(180, 84) = 12$

Επομένως, έχουμε:

$$12 = 1\cdot 180 + (-2)\cdot 84$$

iii) Προφανώς $(-180, 84) = 12$

$$12 = (-1)\cdot(-180) + (-2)\cdot 84$$

iv) Προφανώς $(-180, -84) = 12$

$$12 = (-1)(-180) + 2\cdot(-84)$$

2) Να αποδείξετε ότι:

i. $(2k+2, 2k)=2$, $k\in\mathbb{Z}$

ii. $(2\nu-1, 2\nu+1)=1$, $\nu\in\mathbb{N}^*$

iii. $[2\nu-1, 2\nu+1]=(2\nu-1)(2\nu+1)$, $\nu\in\mathbb{N}^*$

iv. $(\nu+2, 2)\mid \nu$, $\nu\in\mathbb{N}^*$

v. $[\nu, \nu+1]=\nu\cdot(\nu+1)$, $\nu\in\mathbb{N}^*$

<u>ΛΥΣΗ</u>

i. $(2k+2, 2k)=(2k+2-2k, 2k)=(2, 2k)=2$

ii. $(2\nu-1, 2\nu+1)=(2\nu-1, 2\nu+1-2\nu+1)=(2\nu-1, 2)=1$

Διότι ο $2\nu-1 \in \mathbb{N}$ είναι περιττός

iii. $[\,[\alpha,\beta]\cdot(\alpha,\beta)=|\alpha|\cdot|\beta|\,]$

Άρα, $[2\nu-1, 2\nu+1]\cdot\overset{1}{\cancel{(2\nu-1, 2\nu+1)}}=(2\nu-1)\cdot(2\nu+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow [2\nu-1, 2\nu+1]=(2\nu-1)(2\nu+1)$.

iv. $(\nu+2, 2)=(\nu+2-2, 2)=(\nu, 2)$

Αφού, $(\nu,2)\mid 2$ τότε $(\nu+2,2)\mid 2$

v. $[\nu,\nu+1]\cdot(\nu,\nu+1)=|\nu|\cdot|\nu+1|=\nu(\nu+1)$

Και, αφού $(\nu,\nu+1)=1$ λόγω διαδοχικών ν

Τότε $[\nu, \nu+1]=\nu(\nu+1)$.

3) ΝΔΟ $(\alpha,\beta)\leq(\alpha+\beta, \alpha-\beta)$

<u>ΛΥΣΗ</u>

$(\alpha,\beta)\leq(\alpha+\beta, \alpha-\beta) \Leftrightarrow (\alpha,\beta)\mid(\alpha+\beta, \alpha-\beta)$

Έστω $\delta=(\alpha,\beta)$ τότε {} ορισμού του ΜΚΔ:

$$\left.\begin{cases}\delta\mid\alpha\\ \delta\mid\beta\end{cases}\right| \Rightarrow \left.\begin{cases}\delta\mid(\alpha+\beta)\\ \delta\mid(\alpha-\beta)\end{cases}\right| \Rightarrow \delta\mid(\alpha+\beta, \alpha-\beta) \Leftrightarrow (\alpha,\beta)\leq(\alpha+\beta, \alpha-\beta)$$

4) Έστω $\alpha, \beta, x, y \in \mathbb{Z}$ με $\alpha x - \beta y = 1$

ΝΔΟ $(\alpha+\beta, x+y) = 1$. Τι παρατηρείτε για τα $\alpha+\beta$ και $x+y$;

<u>ΛΥΣΗ</u>

Έστω $\delta = (\alpha+\beta, x+y)$ τότε εξ ορισμού του ΜΚΔ

$$\left.\begin{array}{l} \delta \mid (\alpha+\beta) \\ \text{και} \\ \delta \mid (x+y) \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \delta \mid (\alpha x + \beta x) \\ \text{και} \\ \delta \mid (\beta x + \beta y) \end{array}\right| \Rightarrow \delta \mid [\alpha x + \beta x - \beta x - \beta y] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta \mid (\alpha x - \beta y) = 1 \rightsquigarrow (\alpha+\beta, x+y) = 1$$

Παρατηρούμε ότι οι αριθμοί $\alpha+\beta$ & $x+y$ πρώτοι

5) ΝΔΟ

i. $(2\alpha-3\beta, 4\alpha-5\beta) \mid \beta$, ii. $(2\alpha+3, 4\alpha+5) = 1$

iii. $(5\alpha+2, 7\alpha+3) = 1$

<u>ΛΥΣΗ</u>

i. Έστω $\delta = (2\alpha-3\beta, 4\alpha-5\beta)$, τότε

$$\left\{\begin{array}{l} \delta \mid (2\alpha-3\beta) \\ \text{και} \\ \delta \mid (4\alpha-5\beta) \end{array}\right| \Rightarrow \delta \mid [4\alpha-5\beta-2(2\alpha-3\beta)] = \beta$$

Άρα, δ / β

ii. Έστω $\delta' = (2\alpha+3, 4\alpha+5)$

$$\left\{\begin{array}{l} \delta' \mid (2\alpha+3) \\ \text{και} \\ \delta' \mid (4\alpha+5) \end{array}\right| \Rightarrow \delta \mid [-(4\alpha+5)+2(2\alpha+3)] = 1 \Rightarrow \delta = 1$$

iii. Ομοίως.

6) ΝΔΟ $\forall k \in \mathbb{Z}$ ισχύει:

i. $\left(2k+1, \frac{k(k+1)}{2}\right)=1$ & ii. $(4k^2+3k-5, 2k^2+k-2)=1$

<u>ΛΥΣΗ</u>

i. Έστω $\delta=\left(2k+1, \frac{k(k+1)}{2}\right)$, τότε:

$$\left\{\begin{array}{l} \delta \mid 2k+1 \\ \text{και} \\ \delta \mid \frac{k(k+1)}{2} \end{array}\right| \Rightarrow \delta \mid \left[8\frac{k(k+1)}{2} - 2k(2k+1)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta \mid (4k^2+4k-4k^2-2k) = 2k$$

Δηλ.

$$\left.\begin{array}{l} \delta \mid 2k \\ \delta \mid 2k+1 \end{array}\right| \Rightarrow \delta \mid (2k+1-2k)=1 \Rightarrow \boxed{\delta=1}$$

ii. $(4k^2+3k-5, 2k^2+k-2) =$ {βάσει του $(a,\beta)=(a-k\beta, \beta)$}

$= \left((4k^2+3k-5)-2(2k^2+k-2), 2k^2+k-2\right) =$

$= (k-1, 2k^2+k-2) = (k-1, (2k^2+k-2)-2k(k-1)) =$

$= (k-1, 3k-2) = (k-1, (3k-2)-3(k-1)) = (k-1, 1) = 1$

7) Να αποδείξετε ότι:

$(a, \beta, a+\beta) = (a, \beta)$

{Γενικά $(a,\beta,\gamma) = ((a,\beta),\gamma) = (a, (\beta,\gamma))$.}

<u>ΛΥΣΗ</u>

$(a, \beta, a+\beta) = (a, (\beta, a+\beta)) = (a, (\beta, a)) = (a, \beta, a) =$
$= (a, \beta)$

{$(\beta, a+\beta) = (\beta, a+\beta-\beta) = (\beta, a)$}

8) Να βρείτε το θετικό ακέραιο για τον οποίον ισχύει
α. $(\alpha, \alpha+\nu)=1$, $\forall \nu \in \mathbb{N}^*$
β. $(\nu, \alpha+\nu)=1$, $\forall \nu \in \mathbb{N}^*$

ΛΥΣΗ

α. $(\alpha, \alpha+\nu)=(\alpha, \alpha+\nu-\alpha)=(\alpha, \nu)$
Επομένως, θέλουμε να ισχύει $(\alpha,\nu)=1$, $\forall \nu \in \mathbb{N}^*$
Αυτό ισχύει όταν $\alpha=1$, αφού για $\nu=\alpha$
στην παραπάνω ισότητα έχουμε:
$(\alpha, \alpha)=1 \Rightarrow \alpha=1$

β. $(\nu, \alpha+\nu)=(\nu, \alpha+\nu-\nu)=(\nu, \alpha)$
Επομένως, θέλουμε να ισχύει $(\nu, \alpha)=1$, $\forall \nu \in \mathbb{N}^*$
Αυτό, ισχύει ξανά για τον ίδιο λόγο άρα $\alpha=1$

9) Αν $(\alpha,\beta)=1$ και $\gamma|(\alpha+\beta)$, νδο $(\alpha,\gamma)=(\beta,\gamma)=1$

ΛΥΣΗ

Έστω $\delta_1=(\alpha,\gamma)$ & $\delta_2=(\beta,\gamma)$
$\gamma|(\alpha+\beta) \Rightarrow \delta_1|(\alpha+\beta) \Rightarrow \delta_1|\alpha$ και $\delta_1|(\alpha+\beta)$
οπότε $\delta_1|\beta$. Άρα $\delta_1|\alpha$ & $\delta_1|\beta$, οπότε $\delta_1|(\alpha,\beta)$
δηλαδή $\delta_1|1 \rightsquigarrow \delta_1=1$
Για το δ_2 εργαζόμαστε όμοια και έτσι $\delta_2=1$

10) Έστω $\alpha,\beta,\mu,\nu \in \mathbb{N}^*$ με $(\alpha,\beta)=1$. ΝΔΟ $(\alpha^\mu, \beta^\nu)=1$

ΛΥΣΗ

α' τρόπος: Επειδή, $(\alpha,\beta)=1$ οι κανονικές μορφές των α,β δεν έχουν κοινό παράγοντα. Άρα, οι κανονικές μορφές των α^μ και β^ν δεν θα έχουν κοινό παράγοντα οπότε $(\alpha^\mu, \beta^\nu)=1$

β' τρόπος: Έστω $(\alpha^\mu, \beta^\mu)>1$, τότε $\exists p>0$ πρώτος διαιρέτης του (α^μ, β^ν). Επομένως,

$\begin{cases} p|\alpha^\mu \\ p|\beta^\nu \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} p|\alpha \\ p|\beta \end{cases} \rightsquigarrow p|(\alpha,\beta) \rightsquigarrow p|1 \rightsquigarrow p=1$ Άτοπο.

11)

$$\begin{array}{r|l} 490 & 2 \\ 245 & 5 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1125 & 3 \\ 375 & 3 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2728 & 2 \\ 1364 & 2 \\ 682 & 2 \\ 341 & 11 \\ 31 & 31 \\ 1 & \end{array}$$

$490 = 2 \cdot 5 \cdot 7^2$ $\qquad$ $1125 = 3^2 \cdot 5^3$ $\qquad$ $2728 = 2^3 \cdot 11 \cdot 31$

(Ο ΜΚΔ θετικών ακεραίων που είναι γραμμέν. σε κανονική μορφή, είναι ίσος με το γινόμενο των κοινών τους παραγόντων και τον κάθε παράγοντα υψωμένο στο μικρότερο εκθέτη
Το ΕΚΠ θετικών ακεραίων που είναι γραμμένοι σε κανονική μορφή, είναι ίσο με το γινόμενο των κοινών και μη κοινών τους παραγόντων και με τον καθε παράγοντα υψωμένο στο μεγιστο εκθέτη)

Αρα, $(490, 1125, 2728) = 1$
και

$$[490, 1125, 2728] = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 31.$$